

SÉRIE : E

N° D'ORDRE : 250

THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITE DE CLERMONT-FERRAND II

(U.E.R. des Sciences Exactes et Naturelles à dominante Recherche)

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Jean - Pierre CROUZEIX

CONTRIBUTIONS A L'ETUDE DES FONCTIONS QUASICONVEXES.

SOUTENUE LE 28 OCTOBRE 1977 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

MM. P. L. HENNEQUIN

Président

M. ATTEIA
A. AUSLENDER
J. BARANGER
H. MOULIN

Examineurs



Résumé de la thèse de doctorat es-sciences mathématiques

de J.P. CROUZEIX

CONTRIBUTIONS A L'ETUDE DES FONCTIONS QUASICONVEXES

L'étude des fonctions convexes, de la programmation et de la dualité convexe a été considérablement enrichie au cours des vingt dernières années. Cet intérêt pour la convexité a encore peu atteint, malgré sa relative ancienneté (1949, De Finetti) cette généralisation importante de la convexité qu'est la quasiconvexité. Cette thèse lui est intégralement consacrée et peut, bien que les interpénétrations soient importantes, être sommairement divisée en deux parties, la première étant consacrée à la construction d'une théorie de la dualité quasiconvexe, la seconde à la convexifiabilité des fonctions quasiconvexes. En effet, une classe importante de fonctions quasiconvexes est celle des fonctions g qui peuvent se mettre sous la forme $g = k \circ f$, f étant une fonction convexe et k une fonction continue strictement croissante.

Nous allons maintenant détailler, chapitre par chapitre, les principaux résultats obtenus. Dans un but de simplification nous nous sommes limités à des espaces de dimension finie, la majorité des résultats s'étendant sans difficulté en dimension infinie.

Chapitre I

Après avoir rappelé les définitions liées à la quasiconvexité, nous associons à une fonction f appartenant à $\overline{\mathbb{R}}^X$ ($X = \mathbb{R}^n$) la plus grande fonction quasiconvexe qui minore f et la plus grande fonction quasiconvexe s.c.i. qui minore f ; de telles fonctions existent et seront notées f_q

et $f_{\bar{q}}$. Un résultat fondamental est le suivant: si f est quasiconvexe il est équivalent de dire que f est s.c.i. en x_0 et que $f(x_0)$ coïncide avec $f_{\bar{q}}(x_0)$. Une fonction f est dite héli-s.c.i. en x_0 si pour tout $d \in X$, la fonction d'une variable réelle qui à t associe $f(x_0 + td)$ est s.c.i. en x_0 ; on définit de même l'héli-semi-continuité supérieure; on montre que si f est héli-s.c.i. en x_0 , alors f est s.c.i. en x_0 , que si f est héli-s.c.s. en x_0 , alors f est s.c.s. en x_0 . Comme corollaire, il s'ensuit qu'une fonction quasiconvexe G-différentiable en x_0 est continue en x_0 . Nous donnons également des conditions de quasiconvexité du second ordre différentes de celles obtenues précédemment.

Chapitre II

Ce chapitre et le suivant sont consacrés à la construction, d'une théorie de la dualité quasiconvexe analogue à celle développée en dualité convexe par Joly-Laurent et Rockafellar. Rappelons le schéma de la dualité quasiconvexe.

On considère le problème d'optimisation

$$\alpha = \inf f(x) \quad (P) \quad f \in \mathbb{R}^X$$

au couple (X, f) on associe un espace de perturbation U et une fonction de perturbation $\varphi \in \mathbb{R}^{X \times U}$ vérifiant la relation

$$\varphi(x, 0) = f(x) \quad \forall x \in X.$$

Soit alors la fonction $h \in \mathbb{R}^U$ définie par

$$h(u) = \inf \varphi(x, u).$$

Il s'ensuit que l'on a $\alpha = h(0)$.

En dualité convexe, on considère la bipolaire f^{**} de f ; f^{**} est une minorante convexe s.c.i. de f , il s'ensuit l'inégalité de dualité

$$\beta = h^{**}(0) \leq \alpha = h(0).$$

$h^{**}(0)$ peut s'écrire en termes d'optimisation convexe, on a en effet:

$$h^{**}(0) = \sup [-h^*(u^*)] \quad (Q_0)$$

Le problème d'optimisation (Q_c) est appelé problème dual de (P) . Les solutions de ce problème dual peuvent être caractérisées en terme de sous-différentiel de h en 0 .

Afin d'obtenir un schéma analogue en dualité quasiconvexe nous caractérisons des bipolaires quasiconvexes, nous montrons comment ces bipolaires peuvent s'écrire en terme d'optimisation quasiconvexe et comment caractériser les solutions de ces problèmes d'optimisation. Deux types de dualité sont proposés un correspondant à des notions introduites par Greenberg et Pierskalla, l'autre par l'auteur.

Chapitre III

Ces notions dégagées, il était alors possible de construire une théorie générale et cohérente de la dualité quasiconvexe qui englobe la dualité convexe. A titre d'exemples sont étudiés les problèmes d'optimisation suivants

$$a) \quad \alpha = \inf [g(x)/f_i(x) \leq 0 \quad i = 1 \text{ à } p]$$

où g est une fonction quasiconvexe et les fonctions f_i sont convexes.

Le schéma de dualité proposé conduit à la "surrogate duality".

b) ce même problème est repris lorsque les fonctions f_i sont quasiconvexes, le schéma de dualité proposé conduit alors à des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité en programmation quasiconvexe.

c) Nous montrons également que le problème de croissance économique de Von-Neumann est de nature quasiconvexe et que la dualité quasiconvexe permet de retrouver les résultats de dualité qui y sont rattachés.

d) Divers problèmes ayant une formulation proche du précédent sont considérés.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548622_0004

Chapitre IV

Etant donné un préordre convexe complet continu sur D , un résultat de Debreu permet de lui associer une fonction d'utilité quasiconvexe, continue par rapport à D , qui le représente. Le préordre est dit convexifiable s'il existe une fonction d'utilité convexe le représentant. Nous nous intéressons au problème de savoir à quelles conditions un préordre est convexifiable. Une opération de fermeture sur les préordres convexes permet de se ramener au problème suivant étant donnée une fonction quasiconvexe f s.c.i. en tout point de son domaine, existe-t'il une fonction numérique k croissante continue telle que $k \circ f$ soit convexe? Soit f une telle fonction, pour tout x^* non nul appartenant à X on associe à f les fonctions suivantes:

$$F_{x^*}(\lambda) = \sup [\langle x, x^* \rangle / f(x) \leq \lambda]$$

$$F_{x^*}^-(t) = \inf [f(x) / \langle x, x^* \rangle \geq t]$$

f est alors convexe si et seulement si pour tout x^* les fonctions F_{x^*} sont concaves ou si et seulement si pour tout x^* les fonctions $F_{x^*}^-$ sont convexes. Ce théorème possède une interprétation économique importante. Une application de ce théorème aux fonctions positivement homogènes permet de montrer que toutes les formes quadratiques qui sont quasiconvexes sur un convexe sont nécessairement sur ce convexe convexifiables. Un théorème reliant les dérivées secondes d'une fonction convexe et de sa polaire et un théorème de convexification locale permettent de relier les dérivées premières et secondes d'une fonction quasiconvexe f à celles de F_{x^*} et $F_{x^*}^-$.

Chapitre V

Nous montrons comment construire une fonction convexe admettant n tranches données puis nous reprenons le problème de la convexifiabilité d'une fonction quasiconvexe s.c.i. en tout point de son domaine.

L'originalité de notre démarche par rapport aux travaux antérieurs de Fenchel et Kannai et ce qui en fait l'efficacité consiste en ceci: étant donnée la fonction de départ u , nous construisons une fonction intermédiaire représentant le même préordre que u et telle que toute fonction convexe g représentant ce même préordre soit du type $g = k \circ f$, k étant convexe. Nous montrons alors comment obtenir à partir de f les fonctions convexes représentant le préordre, ce procédé donne en même temps une démonstration constructive du théorème de Debreu concernant l'existence de fonctions convexes minimales. Les techniques de convexification proposées sont beaucoup plus efficaces que celles proposées par Fenchel et Kannai. Un exemple illustrant ces techniques est intégralement traité.

Chapitre VI

Au chapitre VI sont regroupés un certain nombre de retombées des résultats précédents. Dans une première partie, nous donnons un certain nombre de résultats sur les fonctions convexes minimales, nous montrons ensuite comment est reliée cette notion de minimalité convexe à la notion de "risk-aversion" en économie. Dans une troisième partie, nous traitons de certains problèmes d'optimisation quasiconvexe qui sont convexifiables. Enfin nous montrons que la relation qui, en économie, associe, pour une certaine classe de fonctions, à une fonction d'utilité la fonction d'utilité indirecte est une relation de dualité symétrique.

La thèse a été soutenue à l'université de Clermont II le 28 Octobre 1977. Président Mr. P. L. Hennequin; examinateurs Mrs. M. Atteia, A. Auslender, A. Badrikian, J. Baranger, H. Moulin.

Un exemplaire de la thèse pourra être obtenu en le demandant à l'adresse suivante:

Secretariat de Mathématiques Appliquées
U.E.R. Sciences exactes et naturelles
de Clermont-Ferrand
B.P. 45
63 170 Aubiers.

